

Jumps et modèles de type GARCH

Sébastien Laurent^a, Christelle Lecourt^b

^a*Aix-Marseille University (Aix-Marseille School of Economics), CNRS & EHESS,
Aix-Marseille Graduate School of Management – IAE, France*

^b*Aix-Marseille University, CERGAM EA 4225, 13540, Puyricard, France*

Abstract

Les cours des actifs financiers ont subi, au cours de ces dernières années, de très fortes fluctuations. Ces mouvements extrêmes ont ravivé l'intérêt porté à la question de la volatilité des marchés financiers et partant, de l'occurrence de ces pics de volatilité très souvent causés par l'arrivée de nouvelles informations sur les marchés financiers. Afin d'identifier de tels mouvements extrêmes qualifiés de jumps, Laurent et alii (2012a) ont développé un test dans le contexte des modèles Gaussiens de type ARMA-GARCH permettant de filtrer les jumps des séries de rendements d'actifs financiers. Ils concluent que les modèles univariés de type GARCH estimés à partir des rendements filtrés des jumps sont plus performants en terme de prévision que ceux estimés sur les rendements non filtrés. Dans ce papier, nous appliquons ce test sur 10 actions américaines et trouvons qu'un à deux pour-cents des observations sont responsables du rejet de l'hypothèse de normalité. Nous considérons également plusieurs modèles GARCH multivariés (cDCC, Scalar BEKK, RiskMetrics, CCC) estimés sur les rendements bruts et sur les rendements filtrés des jumps et montrent que les modèles cDCC estimés sur les rendements filtrés sont plus performants que les autres modèles considérés en terme de pouvoir prédictif.

Keywords: Jumps, GARCH, MGARCH, Test, Prévision.

Email addresses: sebastien.laurent@univ-amu.fr (Sébastien Laurent),
christelle.lecourt@univ-amu.fr (Christelle Lecourt)

1. Introduction

Le 19 avril 2000, l'action Bristol-Myers Squibb, une des plus grandes firmes pharmaceutiques aux Etats-Unis, perdait 30% de sa valeur en une journée. Cette chute brutale et soudaine était due au retrait d'un nouveau médicament pour l'hypertension, l'Omapatrilat, très prometteur et très attendu sur le marché. Le marché s'est immédiatement adapté à cette nouvelle information et le cours de l'action s'est à nouveau stabilisé. Le 2 décembre 2014, l'action Apple chutait brusquement de près de 6% en quelques minutes alors qu'elle était en hausse de près de 64% depuis le début de l'année 2014, cette baisse étant due non pas à des mauvaises nouvelles mais simplement à des opérations de revente d'actions automatisées. Le 9 décembre 2014, le cours de l'action Airbus perdait plus de 10% de sa valeur en quelques heures, souffrant du report de la livraison du premier A350 mais surtout de la révision à la baisse de ses perspectives financières ainsi que de la cession de 26,8% de ses parts dans l'entreprise finlandaise Patria. Ces mouvements spectaculaires et soudains, fort heureusement peu fréquents, causés la plupart du temps par l'arrivée de nouvelles informations (surprises), ont ravivé l'intérêt porté à la question de la volatilité des marchés financiers tant par les académiques que par les praticiens, les autorités de régulation et de contrôle. La compréhension de ces mouvements extrêmes de volatilité est d'autant plus justifiée que les chocs boursiers ne sont pas sans conséquence en termes de stabilité financière et qu'ils peuvent s'accompagner de répercussions sur l'économie réelle, comme nous l'a prouvé la récente crise financière.

Les études scientifiques portant sur la mesure de la volatilité des rendements d'actifs financiers et sur l'occurrence des jumps n'ont cessé de se développer. Dans le contexte de modèles de type auto-régressifs (AR) estimés sur des mesures non-paramétriques de la volatilité utilisant des données à haute fréquence (c'est-à-dire la volatilité réalisée), Andersen et alii (2007) montrent que si on ignore la présence de jumps, ces modèles ont tendance à surestimer largement la volatilité pendant plusieurs semaines après leur occurrence. Dans les modélisations univariées de type Generalized Autoregressive Conditional

Heteroskedasticity (GARCH), de nombreuses études (Sakata et White (1998), Franses et Ghijssels (1999), Carnero et alii (2007, 2008), Charles et Darné (2005) ou encore Muler et Yohai (2008)) parviennent à la conclusion que l'estimateur par maximum de vraisemblance gaussien (Quasi Maximum Likelihood, QML) a tendance à surestimer la volatilité les jours qui suivent un jump et à donner des estimations biaisées vers le haut de la volatilité de long-terme.

Afin de tenir compte de l'impact des jumps sur le processus de volatilité, Laurent et alii (2012a) proposent un test permettant d'identifier les jumps additifs dans le contexte des modèles conditionnels de type Autoregressive Moving Average-Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARMA-GARCH). Inspiré des tests non-paramétriques de détection des jumps proposés par Lee et Mykland (2008) et Andersen et alii (2007b), le test proposé par ces auteurs repose sur les deux principes suivants :

- sur les jours sans jump, les rendements des actifs financiers sont conditionnellement gaussiens ;
- lorsque la volatilité spot ou instantanée est élevée et ce, même en l'absence de jumps, les rendements peuvent également être élevés.

Le test est basé sur les rendements standardisés, où les deux premiers moments conditionnels des observations non contaminées par les jumps sont estimés de manière robuste. En utilisant le test de "Model Confidence Sets" (MCS) de Hansen et alii (2011) et la volatilité réalisée pour approximer la vraie variance, Laurent et alii (2012a) concluent que les modèles de type GARCH estimés des rendements d'actions filtrés des jumps sont plus performants en terme de prévision de la variance que ceux estimés sur les données brutes (données non filtrées des jumps), y compris les modèles récents de type Generalized Autoregressive Score (GAS) développés par Harvey et Chakravarty (2008), Harvey et Sucarrat (2012) et Creal et alii (2013). Ces modèles sont sensés bien accommoder la présence de valeurs extrêmes.

Dans ce papier, nous appliquons le test proposé par Laurent et alii (2012a) afin de tester si la prise en compte des jumps dans les rendements d'actifs financiers permet d'améliorer non seulement la prévision de variance mais également celle de la matrice de covariance. Une meilleure prédiction de la dépen-

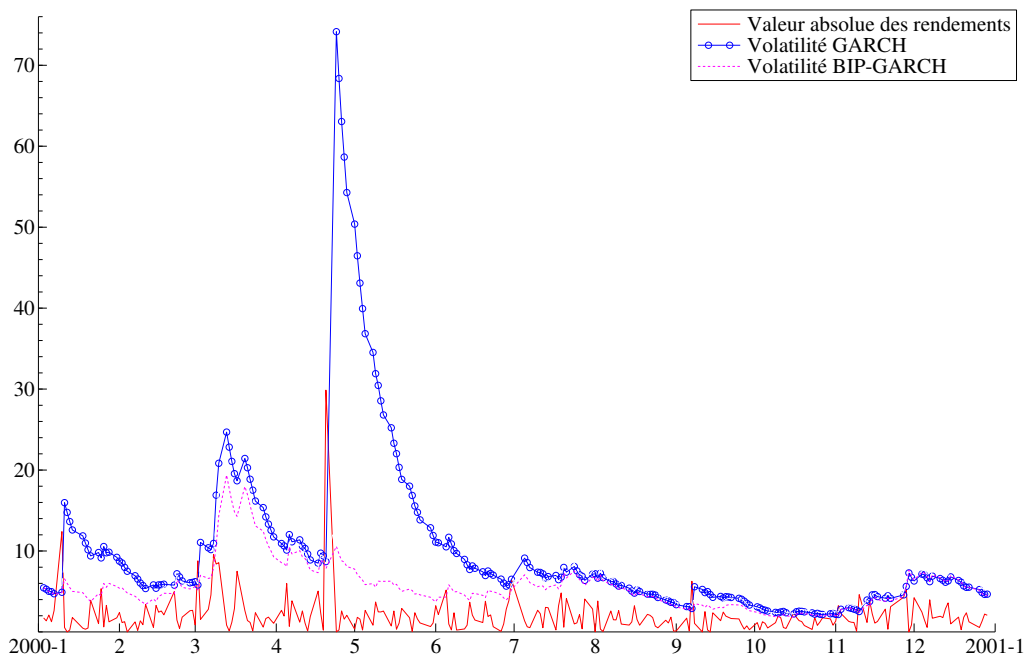
dance temporelle dans les moments de second ordre des rendements d'actifs financiers est en effet importante dans beaucoup de domaines en économétrie financière. Il est maintenant largement reconnu dans la littérature financière que les rendements d'actifs financiers varient de manière commune à travers le temps et les différents marchés financiers. Partant de ce constat, le choix des modèles multivariés de volatilité apparaît ainsi plus pertinent que celui des modèles univariés. En particulier, ces modèles constituent de meilleurs outils d'aide à la décision dans de nombreux domaines tels que les modèles de pricing d'actifs, la sélection de portefeuille ou les prévisions de Value-at-Risk (VaR). Pour ce faire, nous considérons plusieurs modèles GARCH multivariés (cDCC, Scalar BEKK, RiskMetrics, CCC) estimés sur les rendements bruts et sur les rendements filtrés des jumps de 10 actions américaines. Nous trouvons qu'un à deux pour-cents des observations sont responsables du rejet de l'hypothèse de normalité et que les modèles cDCC estimés sur les rendements filtrés sont plus performants que les autres modèles considérés en terme de pouvoir prédictif.

Le reste du papier est organisé comme suit. La section 2 est consacrée à la présentation du test des jumps additifs. Dans la section suivante, les résultats en termes de pouvoir prédictif des divers modèles de type GARCH multivariés estimés sur séries brutes et filtrées sont donnés. Enfin, la dernière section conclue.

2. Modèles GARCH et jumps additifs

Comme précisé dans l'introduction, les actifs financiers sont particulièrement sensibles à l'arrivée de nouvelles informations et plus particulièrement aux "mauvaises" nouvelles. Les exemples précédemment donnés illustrent bien l'ampleur que peuvent avoir les jumps ainsi que leur durée de très court terme. La prise en compte de ces jumps est donc cruciale afin de mieux prévoir la volatilité des actifs financiers. Afin d'illustrer ceci, le graphique 1 représente les rendements absolus journaliers en % pour l'année 2000 ainsi que la volatilité conditionnelle ($\hat{\sigma}_t$) de l'action Bristol-Myers Squibb (BMY) estimées à partir de deux modèles, un modèle AR(1)-GARCH(1,1) et un modèle "Bounded

Figure 1: Bristol-Myers Squibb



Innovation Propagation" (BIP)-AR(1)-BIP-GARCH(1,1) décrit dans la section suivante et qui vise à sous-pondérer de manière endogène l'effet du jump se produisant le 19 avril 2000.¹ Du graphique 1, il ressort deux constats : i) la volatilité conditionnelle pour le modèle AR(1)-GARCH(1,1) s'accroît très fortement et reste à un niveau très élevé durant un 1 mois et demi après l'évènement ; ii) à la différence du modèle AR(1)-GARCH(1,1), le modèle BIP-AR(1)-BIP-GARCH(1,1) ne surestime pas la volatilité après l'occurrence de ce choc.

2.1. Le modèle "Bounded Innovation Propagation" (BIP)- ARMA-GARCH

Les modèles GARCH développés par Bollerslev (1986) ainsi que les modèles GJR développés par Glosten et alii (1993) font partie des outils incontournables pour la modélisation de la volatilité journalière des séries financières. Le succès de ces modèles tient au fait qu'ils parviennent à capturer très simplement, mais

1. Les deux modèles ont été estimés sur la période 1999-2008.

partiellement, certains faits stylisés importants des séries temporelles financières (grappes de volatilité, non-normalité de la distribution des rendements, queues épaisses, effet de levier).

Une variable aléatoire r_t suit un modèle ARMA(p,q)-GJR(1,1) si elle peut être décrite par le système (2.1)-(2.4) suivant :

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

$$\mu_t = c + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \text{ et } z_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \quad (2.3)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (2.4)$$

où $D_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$ et 0 sinon, les ζ_i sont les coefficients de $\zeta(L) = \phi^{-1}(L)\theta(L) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i L^i$, L est l'opérateur de retard, $\phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i$ et $\theta(L) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i L^i$ sont les polynômes AR et MA d'ordres respectifs p et q (avec les racines en dehors du cercle unitaire). Dès lors, μ_t est la moyenne conditionnelle de r_t tandis que σ_t^2 est sa variance conditionnelle. Notons que le modèle (2.1)-(2.4) se réduit à un modèle ARMA(p,q)-GARCH(1,1) lorsque $\gamma_1 = 0$.

Si on ajoute la composante de jump $a_t I_t$, on obtient :

$$r_t^* = r_t + a_t I_t, \quad (2.5)$$

où r_t^* représente les rendements financiers observés, I_t est une variable binaire prenant la valeur 1 en présence d'un jump à la date t et 0 sinon et a_t est la taille des jumps (positive ou négative). Le modèle pour r_t^* a la propriété qu'un jump $a_t I_t$ n'affectera pas la variance conditionnelle de r_{t+1} , notée σ_{t+1}^2 , et il génère des distributions conditionnelles non-gaussiennes à queue épaisse pour r_t^* .

La statistique de test de détection des jumps additifs proposée par Laurent et alii (2012a) est $|\tilde{J}_t|$, où

$$\tilde{J}_t = \frac{r_t^* - \tilde{\mu}_t}{\tilde{\sigma}_t}, \quad (2.6)$$

et $\tilde{\mu}_t$ et $\tilde{\sigma}_t^2$ sont respectivement des estimateurs de μ_t et σ_t^2 dans le modèle (2.1)-(2.5) sensés être robustes à la présence potentielle de jumps additifs $a_t I_t$ (c'est-à-dire estimés en utilisant r_t^* et non r_t). Par "robuste" ou "robuste aux jumps", nous entendons que l'on cherche à obtenir une estimation fiable des paramètres du modèle central pour r_t alors qu'on observe uniquement le processus contaminé r_t^* .

Si $a_t I_t = 0$ le jour t , \tilde{J}_t suit asymptotiquement une distribution normale standardisée. Dès lors, des valeurs élevées de $|\tilde{J}_t|$ devraient refléter la présence de jumps.

Afin de tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : a_t I_t = 0 \text{ pour } t = 1, \dots, T$$

contre

$$H_1 : a_t I_t \neq 0,$$

Laurent et alii (2012a) proposent de calculer $\tilde{J}_t \forall t$ et de rejeter H_0 si $\max_T |\tilde{J}_t| > g_{T,\lambda}$, où \max_T est le maximum de $|\tilde{J}_t|$ pour $t = 1, \dots, T$ et $g_{T,\lambda}$ est la valeur critique du test.

Dans le cas où H_0 est rejetée, les auteurs proposent la règle de détection des jumps suivante :

$$\tilde{I}_t = I \left(|\tilde{J}_t| > g_{T,\lambda} \right), \quad (2.7)$$

où $I(\cdot)$ est la fonction indicatrice. Afin de contrôler la taille des tests de jumps multiples, les auteurs suivent Lee et Mykland (2008) en utilisant la théorie des valeurs extrêmes selon laquelle le maximum de T réalisations i.i.d. de la valeur absolue d'une variable aléatoire normale standard suit asymptotiquement (pour $T \rightarrow \infty$) une distribution de Gumbel. Plus spécifiquement, en l'absence de jumps, la probabilité que le maximum de n'importe quel ensemble de T J-statistiques indépendantes $|\tilde{J}_t|$ excède

$$g_{T,\lambda} = -\log(-\log(1-\lambda))b_T + c_T, \quad (2.8)$$

avec $b_T = 1/\sqrt{2\log T}$ et $c_T = (2\log T)^{1/2} - [\log \pi + \log(\log T)]/[2(2\log T)^{1/2}]$, est égal à λ quand $T \rightarrow \infty$. Dès lors, en suivant (2.7), tous les rendements pour lesquels $|\tilde{J}_t| > g_{T,\lambda}$ devraient être considérés comme étant affectés par des jumps. Le calcul de $|\tilde{J}_t|$ requiert des estimations paramétriques de $\tilde{\mu}_t$ et de $\tilde{\sigma}_t^2$. Des spécifications auxiliaires destinées à limiter les effets des jumps sur la moyenne et la variance conditionnelles sont présentées dans les sections suivantes ainsi qu'une méthode d'estimation robuste de ces quantités.

2.2. Spécification auxiliaire pour $\tilde{\mu}_t$

Muler et alii (2009) ont développé un modèle permettant d'obtenir des estimations robustes (à des jumps additifs) des paramètres de modèles ARMA. Le modèle proposé vise à sous-pondérer l'effet de valeurs extrêmes passées de r_t^* dans la représentation moyenne mobile infinie de la moyenne conditionnelle du modèle ARMA. Ceci conduit à la spécification suivante pour approximer la moyenne conditionnelle de r_t^* :

$$\tilde{\mu}_t = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \tilde{\sigma}_{t-i} w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(\tilde{J}_{t-i}), \quad (2.9)$$

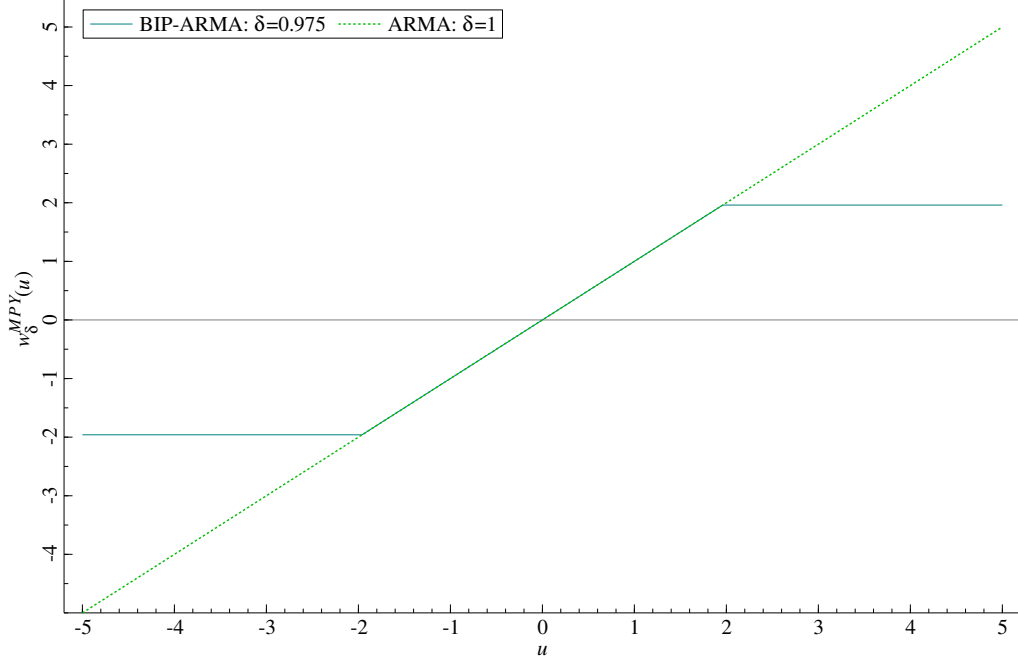
où \tilde{J}_{t-i} est donné dans l'équation (2.6), k_δ est le quantile δ de la distribution normale et $\tilde{\sigma}_{t-i}$ est défini ci-dessous.

La fonction de pondération $w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(\cdot)$ dans l'équation (2.9) joue un rôle important dans la robustification du modèle ARMA. Afin d'obtenir des estimations robustes et efficaces des coefficients ARMA, Muler et alii (2009) montrent que la fonction $w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(\cdot)$ doit être bornée. Plus spécifiquement, ils proposent la fonction de pondération suivante :

$$w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(\tilde{J}_{t-i}) = \text{sign}(\tilde{J}_{t-i}) \min\left(|\tilde{J}_{t-i}|, k_\delta\right). \quad (2.10)$$

La figure 2 illustre la fonction $w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(u)$ pour $\delta = 1$ et 0.975. Lorsque $\delta = 1$, on a un modèle ARMA et dans ce cas, l'effet d'un choc (c'est-à-dire u) est linéaire et non borné (c'est-à-dire entre $-\infty$ et $+\infty$) comme il est montré sur le graphique. Lorsque $\delta = 0.975$, les valeurs maximales de la fonction $w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(u)$

Figure 2: $w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(\cdot)$ pour un modèle ARMA et un modèle BIP-ARMA (avec $\delta = 0.975$)



sont bornées entre -2 et 2.

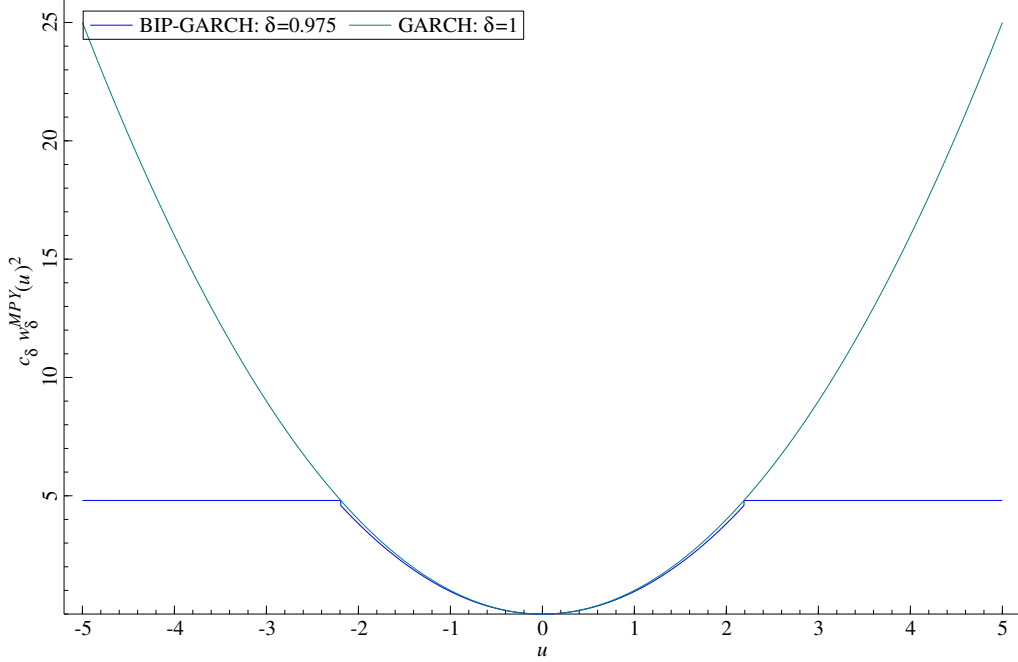
Le modèle auxiliaire sous-jacent avec la fonction de pondération est appelé *Bounded Innovation Propagation* (BIP)–ARMA car l’effet des jumps (c’est-à-dire $a_t I_t$) sur les valeurs futures de μ_t est borné. \tilde{J}_{t-i} suit une distribution normale en l’absence de jumps au temps $t - i$. Un jump sera détecté dans r_{t-i}^* lorsque $|\tilde{J}_{t-i}|$ excède k_δ . Les valeurs typiques pour δ sont 0.95 et 0.975.

2.2.1. Spécification auxiliaire pour $\tilde{\sigma}_t^2$

Muler et Yohai (2008) ont développé une idée similaire afin de limiter l’effet de $a_t I_t$ sur l’estimation des paramètres du modèle GARCH. Le modèle proposé par les auteurs est appelé *Bounded Innovation Propagation* (BIP)–GARCH. Laurent et alii (2012a) ont étendu le modèle BIP–GARCH afin de tenir compte d’un effet de levier. Le modèle BIP–GJR(1,1) est spécifié de la manière suivante :

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \omega + \alpha_1 \tilde{\sigma}_{t-1}^2 c_\delta w_{k_\delta}^{\text{MPY}} \left(\tilde{J}_{t-1} \right)^2 + \gamma_1 \tilde{D}_{t-1} \tilde{\sigma}_{t-1}^2 c_\delta w_{k_\delta}^{\text{MPY}} \left(\tilde{J}_{t-1} \right)^2 + \beta_1 \tilde{\sigma}_{t-1}^2, \quad (2.11)$$

Figure 3: $c_\delta w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(u)^2$ pour un modèle GARCH et BIP-GARCH (avec $\delta = 0.975$)



où $\tilde{D}_{t-1} = 1$ si $\tilde{J}_{t-1} < 0$ et 0 sinon et le facteur c_δ (proposé par Boudt et alii, 2013) est introduit afin que l'espérance conditionnelle du carré des chocs pondérés soit la variance conditionnelle de r_t en l'absence de jumps.² Comme pour le modèle BIP-ARMA, les résidus au carré suspectés être contaminés par des jumps additifs sont sous-pondérés dans l'équation BIP-GJR.³

La fonction $c_\delta w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(u)^2$ est représentée par le graphique 3 pour $\delta = 1$ et 0.975. Notons que lorsque $\delta = 1$, on retrouve le modèle GARCH. Du graphique, il ressort que l'effet d'un choc (c'est-à-dire u) est quadratique et dès lors non borné (c'est-à-dire $c_1 w_{k_1}^{\text{MPY}}(u)^2 = u^2$). Pour le modèle BIP-GARCH, la valeur maximale prise par la fonction $c_\delta w_{k_\delta}^{\text{MPY}}(u)^2$ est environ 5 pour $\delta = 0.975$.

2. Notons que $c_\delta = 1.0185, 1.0465, 1.0953, 1.2030$ respectivement pour $\delta = 0.99, 0.975, 0.95,$ et 0.90 tandis que $c_1 = 1$ et dès lors en l'absence de jumps, on a $c_1 w_{k_1}^{\text{MPY}}(\tilde{J}_{t-1})^2 = z_{t-1}^2$, ce qui conduit à une spécification GJR(1,1).

3. De la même manière, les valeurs pour δ sont 0.95 et 0.975.

2.3. Estimation robuste de $\tilde{\mu}_t$ et $\tilde{\sigma}_t^2$

Muler et alii (2009) et Muler et Yohai (2008) montrent respectivement que l'estimation par maximum de vraisemblance d'un modèle BIP-ARMA avec variance constante et d'un modèle BIP-GARCH avec moyenne conditionnelle n'est pas efficace en présence de jumps additifs. Ils recommandent d'utiliser un estimateur \hat{M} qui permet de minimiser la valeur moyenne d'une fonction objectif $\rho(\cdot)$, évaluée à la transformation logarithmique des rendements standardisés au carré, ce qui s'écrit :

$$\hat{\theta}^M = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho \left(2 \log \left| \frac{r_t^* - \tilde{\mu}_t}{\tilde{\sigma}_t} \right| \right), \quad (2.12)$$

où $\tilde{\mu}_t$ et $\tilde{\sigma}_t^2$ sont donnés respectivement dans (2.9) et (2.11) pour le modèle BIP-ARMA-BIP-GJR(1,1).

Afin d'être robuste, cette fonction nécessite de sous-pondérer les observations extrêmes et par là-même les jumps. Boudt et Croux (2010) et Boudt et alii (2010, 2013) recommandent de prendre $\rho_{t_4}(z)$, c'est-à-dire une fonction associée à une distribution d'une loi de Student à 4 degrés de liberté (t_4) :

$$\rho_{t_4}(z) = -z + 0.8260 (1 + \nu) \log \left(1 + \frac{\exp(z)}{\nu - 2} \right).$$

Il est important de souligner que l'utilisation de $\rho_{t_4}(z)$ ne signifie pas que les innovations suivent une distribution d'une loi de Student- t_4 . Cette fonction est utilisée uniquement afin de sous-pondérer les observations extrêmes et ainsi les jumps dans la fonction objectif (2.12).

2.4. Le filtrage des jumps

La règle décrite dans (2.7) implique que $\tilde{I}_t = 1$ lorsqu'un jump est détecté au temps t et $\tilde{I}_t = 0$ sinon. \tilde{I}_t est ainsi une estimation de $a_t I_t$ dans l'équation (2.5). Une fois le test appliqué, les jumps détectés peuvent être filtrés de r_t^* comme suit :

$$\tilde{r}_t = r_t^* - (r_t^* - \tilde{\mu}_t) \tilde{I}_t, \quad (2.13)$$

où les rendements filtrés \tilde{r}_t devraient être conditionnellement gaussiens sous le modèle (2.1)-(2.5). Notons ici le rôle crucial de l'hypothèse de normalité conditionnelle de r_t . Toutefois, rien ne garanti de trouver des rendements filtrés conditionnellement normaux après avoir appliqué la procédure d'extraction des jumps aux données réelles. Laurent et alii (2012a) recommandent de tester la normalité conditionnelle de \tilde{r}_t à l'aide d'un test de normalité de Jarque-Bera appliqué aux résidus standardisés d'un modèle ARMA-GJR estimé sur \tilde{r}_t . Un rejet de l'hypothèse nulle de normalité invalide l'utilisation de leur test.

3. Application

Dans cette section, nous appliquons le test des jumps décrit à la section précédente sur les séries de rendements d'actions américaines et nous filtrons les jumps détectés en utilisant l'équation (2.13). Nous estimons ensuite différents modèles et comparons leur performance prédictive.

Les données (procurées par TickData) sont des prix de transaction en fréquence intra-journalière (fréquence de 5 minutes) pour $N = 10$ actions à large capitalisation boursière sur les marchés du NYSE et AMEX NASDAQ, sur la période allant du 4 janvier 1999 au 31 décembre 2008 (2 489 jours de trading).⁴ Les données intra-journalières (à une fréquence de 5 minutes) seront utilisées pour calculer des mesures de variances et covariances réalisées afin juger de la performance prédictive de modèles GARCH multivariés alors que le test de jumps et ces modèles GARCH multivariés seront estimés sur des rendements journaliers (calculés comme la somme des rendements intra-journaliers sur chaque journée).⁵

4. Les 10 actions américaines à large capitalisation boursière choisies dans des secteurs diversifiés sont respectivement Apple Corp (AAPL), Abott Laboratories (ABT), American Express Company (AXP), Boeing Co. (BA), Bank of America Corp. (BAC), Bristol-Myers-Squibb Co. (BMY), BP plc (BP), Citigroup (C), Caterpillar Inc (CAT) et Colgate-Palmolive Company (CL).

5. La journée de trading s'étale de 9h30 jusqu'à 16h00.

3.1. *Jumps significatifs*

La proportion de jumps détectés par le test, où $\tilde{\mu}_t$ et $\tilde{\sigma}_t$ sont obtenus en utilisant un modèle BIP–ARMA–BIP–GJR(1,1) et λ est égal à 50%, est reportée dans le tableau 1 (dernière colonne). Le modèle est estimé sur des fenêtres glissantes de 980 observations en utilisant les rendements journaliers sous forme logarithmique en %.^{6,7} Les praticiens ne réestiment pas les paramètres de leurs modèles tous les jours et par conséquent nous suivons Giot et Laurent (2003) et les maintenons constants durant 50 jours. Du tableau, il ressort que la proportion de jumps détectés se situe entre 1 et 2%.

Comme expliqué à la section précédente, l’hypothèse de normalité conditionnelle en l’absence de jumps est cruciale pour que le test soit applicable. Les résultats trouvés montrent que l’hypothèse de normalité est rejetée pour toutes les actions et tous les modèles estimés sur les rendements bruts.⁸ Par contre, les résultats du test de Jarque-Bera reportés dans le tableau 1 suggèrent que l’hypothèse de normalité n’est jamais rejetée pour le modèle ARMA-GJR estimé sur les rendements filtrés des jumps.⁹

En appliquant leur test sur 50 actions (incluant les 10 séries étudiées) sur la même période d’échantillonnage, Laurent et alii (2012a) comparent également le pouvoir prédictif d’un ensemble de modèles de volatilité univariés. En utilisant le test MCS (Model Confidence Set) développé par Hansen et alii (2011) ainsi que la volatilité réalisée pour approximer la vraie variance, les auteurs concluent que les modèles de type GARCH estimés sur les rendements filtrés des jumps sont plus performants que ceux estimés sur les rendements bruts, y compris pour les modèles de type GAS développés par Harvey et Chakravarty (2008), Harvey et Sucarrat (2012) et Creal et alii (2013).

6. Les rendements sont obtenus en sommant les rendements logarithmiques à fréquence 5 minutes.

7. La taille des fenêtres roulantes a été choisie de manière à obtenir environ 1500 prévisions à une période tout en préservant suffisamment d’observations dans la période d’estimation et ainsi avoir des estimations précises des paramètres.

8. Les résultats des différents modèles ne sont pas reportés par souci de place.

9. Les moyennes et variances du test de Jarque-Bera sont calculées à partir des 1500 p-valeurs obtenues sur les fenêtres roulantes de 980 observations.

Tableau 1: Normalité conditionnelle des rendements filtrés (\tilde{r}_t)

Ticker	Moyenne	Variance	% Normalité	% Jumps
AAPL	0.600	0.038	100.000	1.768
ABT	0.646	0.033	100.000	2.009
AXP	0.814	0.007	100.000	1.125
BA	0.464	0.014	100.000	1.607
BAC	0.116	0.004	84.800	1.808
BMY	0.667	0.012	100.000	2.089
BP	0.819	0.010	100.000	1.647
C	0.476	0.028	100.000	2.250
CAT	0.822	0.027	100.000	2.049
CL	0.079	0.002	69.267	1.687

Note : Les colonnes moyennes et variance correspondent aux moyennes et variances empiriques de la p-valeur de tests de Jarque-Bera calculés sur les résidus standardisés de modèles ARMA-GJR estimés sur les rendements filtrés \tilde{r}_t sur 1500 fenêtres glissantes de 980 observations. Les paramètres du modèle sont maintenus constants durant 50 jours et le modèle est réestimé tous les 50 jours. La colonne % Normalité reporte le pourcentage de non-rejet de ce test à un seuil de significativité de 5% alors que la colonne % Jumps reporte le pourcentage de jumps détectés (pour $\lambda = 50\%$).

Dans la section suivante, nous étendons leur application pour la prévision de covariances et de corrélations.

3.2. Modèles GARCH multivariés concurrents

Les modèles GARCH multivariés sont souvent utilisés pour obtenir des prévisions hors échantillon des covariances et des corrélations conditionnelles.¹⁰ Toutefois, comme montré par Boudt et alii (2013), les jumps n'affectent pas uniquement la volatilité mais aussi les covariances et corrélations.

Le modèle GARCH multivarié (MGARCH) le plus populaire est certainement le modèle "Dynamic Conditional Correlation" (DCC) développé par Engle (2002) et récemment étendu par Aielli (2013).

¹⁰. Voir Bauwens et alii (2006) pour une revue de la littérature des principaux modèles GARCH multivariés.

Soit $Y_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})'$ le vecteur de rendements observés de dimension N et

$$Y_t = H_t^{1/2} Z_t \text{ avec } Z_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, I_N), \quad (3.1)$$

où H_t est la matrice de covariance conditionnelle de Y_t et I_N la matrice identité de dimension N .

Soit également R_t la matrice de corrélation conditionnelle avec $R_{ij,t}$ son (i, j) ème élément et D_t la matrice diagonale contenant les variances conditionnelles $h_{ii,t}$, c'est-à-dire

$$D_t = \text{diag} (h_{11,t}^{1/2} \dots h_{NN,t}^{1/2}). \quad (3.2)$$

Pour les variances conditionnelles, on sélectionne un modèle GJR(1,1) pour toutes les séries. Dans le modèle "Consistent Dynamic Conditional Correlation" (cDCC) développé par Aielli (2013), la matrice de variance-covariance conditionnelle H_t est donnée par :

$$H_t = D_t R_t D_t = \left(R_{ij,t} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right). \quad (3.3)$$

La corrélation conditionnelle R_t est basée sur le processus matriciel Q_t , lui-même fonction des rendements dévolatilisés $\tilde{Y}_t = (\tilde{y}_{1,t}, \dots, \tilde{y}_{N,t})' = (y_{1,t}/h_{11,t}^{1/2}, \dots, y_{N,t}/h_{NN,t}^{1/2})' = D_t^{-1} Y_t$, c'est-à-dire

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha P_{t-1} \tilde{Y}_{t-1} \tilde{Y}_{t-1}' P_{t-1} + \beta Q_{t-1}, \quad (3.4)$$

avec $P_t = \text{diag} (q_{11,t}^{1/2} \dots q_{NN,t}^{1/2})$, \bar{Q} la matrice de corrélations non conditionnelles de $P_t \tilde{Y}_t$ et α et β sont des paramètres non négatifs satisfaisant la condition d'existence $\alpha + \beta < 1$. Cette matrice est ainsi reliée à la matrice de corrélations conditionnelles comme suit :

$$R_t = \text{diag} (q_{11,t}^{-1/2} \dots q_{NN,t}^{-1/2}) Q_t \text{diag} (q_{11,t}^{-1/2} \dots q_{NN,t}^{-1/2}). \quad (3.5)$$

Dans le modèle cDCC, l'estimation de la matrice \bar{Q} et des paramètres α

et β sont imbriquées, car la matrice \bar{Q} est estimée séquentiellement comme la matrice de corrélation de $P_t \tilde{Y}_t$, où P_t dépend également de α et β . Toutefois, comme P_t implique uniquement les éléments diagonaux de Q_t (qui ne dépendent pas de \bar{Q} puisque $\bar{Q}_{ii} = 1$ pour $i = 1, \dots, N$), Aielli (2013) montre que, pour des valeurs données de α et β , on a :

$$q_{ii,t} = (1 - \alpha - \beta) + \alpha q_{ii,t-1} \tilde{y}_{i,t-1}^2 + \beta q_{ii,t-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Le reste de la procédure d'estimation de Aielli (2013) est une itération jusqu'à la convergence de (i) l'estimation de la matrice \bar{Q} comme la matrice de corrélation de $P_t \tilde{Y}_t$ et (ii) l'estimation par maximum de vraisemblance de α et β en utilisant la spécification cDCC.

Le principal inconvénient du modèle cDCC est que toutes les observations sont traitées de la même manière. Comme montré par Boudt et alii (2013), si une des séries de rendements a un large jump, ce dernier devrait biaiser l'estimation de la corrélation vers zéro. Dans le cas de co-jumps de même signe (respectivement de signe opposé), les corrélation sont biaisées vers 1 (respectivement -1).

Une version multivariée de (2.5) est dès lors préférable. Boudt et alii (2013) proposent une version robuste aux jumps du modèle cDCC en appliquant le modèle BIP-GARCH à l'équation (3.6). Les auteurs proposent une version multivariée de la fonction objectif donnée dans (2.12). Dans ce papier, nous proposons une solution plus simple qui consiste à estimer le modèle cDCC sur les rendements filtrés des jumps comme montré dans (2.13).

Dans l'ensemble des modèles multivariés concurrents, nous considérons également le modèle Scalar "Baba-Engle-Kraft-Kroner" (BEKK) développé par Engle et Kroner (1995) d'ordre (1,1) :

$$H_t = C^{*'} C^* + \alpha \epsilon_{t-j} \epsilon'_{t-j} \alpha + \beta H_{t-j} \beta, \quad (3.7)$$

où C^* is une matrice triangulaire supérieure.

Le modèle RiskMetrics est également retenu comme modèle concurrent :

$$H_t = 0.06\epsilon_{t-j}\epsilon'_{t-j} + 0.94H_{t-j} \quad (3.8)$$

ainsi que le modèle "Constant Conditional Correlation" (CCC) avec un GJR(1,1) pour la variance conditionnelle, ce qui correspond au modèle cDCC décrit ci-dessus avec $\alpha = \beta = 0$.

Ces modèles sont estimés sur les rendements bruts et filtrés, ce qui conduit à tester le pouvoir prédictif de 8 modèles. Chacun des modèles est estimé sur les 980 premières observations. Les prévisions à une étape de la matrice de variance-covariance conditionnelle ainsi que de la matrice de corrélation conditionnelle sont alors calculées et comparées respectivement à un proxy (voir plus bas). Les modèles sont ré-estimés à chaque nouvelle observation à partir d'une fenêtre glissante de 980 observations. Le nombre total de prévisions est dès lors de 1509.

Tous les modèles sont estimés au moyen du logiciel G@RCH 7.1 de Laurent (2014) et du langage de programmation Ox 7.1 de Doornik (2014).

3.3. Proxy

L'utilisation d'une fonction de perte statistique permet de juger de la performance des modèles concurrents. L'évaluation de la performance de prévision de modèles de volatilité est ardue car la variable d'intérêt (c'est-à-dire la covariance) n'est pas observable et dès lors l'évaluation de la fonction de perte doit s'appuyer sur une proxy. La proxy considérée est basée sur la théorie de la variation quadratique d'une semi-martingale Brownienne avec processus de jumps, à savoir la covariance réalisée (RCOV) de Andersen et alii (2003). Elle est calculée à partir des rendements à 5 minutes pour la prévision de covariance et la corrélation réalisée (RCORR) pour la prévision de corrélation.

3.4. Fonction de perte

Afin d'évaluer la distance entre la proxy et la prévision, nous nous basons sur la distance de Frobenius, c'est-à-dire une extension multivariée du critère

du Mean Square Error (MSE) calculée comme la moyenne (sur les 1509 observations) de la somme (sur les N^2 éléments de la matrice prédite) des carrés des erreurs de prévisions. Laurent et alii (2013) montrent que la substitution de la covariance sous-jacente par une proxy devrait induire une distortion dans le classement des performances des modèles, dans le sens où l'évaluation basée sur la proxy devrait différer du classement que l'on aurait obtenu si la vraie cible était utilisée. Toutefois, une telle distortion peut être évitée si la fonction de perte a une forme fonctionnelle particulière ou si la proxy est suffisamment précise. Notons que la distance de Frobenius fait partie de la famille de fonction de perte convergente au sens de Laurent et alii (2013) tandis que la covariance réalisée est une proxy très précise de la vraie covariance. Afin de comparer la performance prédictive des différents modèles concurrents en terme de prévision de corrélation, nous nous basons sur la corrélation réalisée extraite de la covariance réalisée.

3.5. Test statistique sur les différentiels de perte

Le test "Model Confidence Sets" (MCS) développé par Hansen et alii (2011) est utilisé dans notre analyse afin de comparer les prévisions. L'intérêt de ce test est qu'il permet d'identifier un sous-ensemble de modèles qui sont équivalents en termes de performance prédictive en utilisant une certaine fonction de perte mais qui sur-performent tous les autres modèles concurrents.

L'implémentation de ce test a été réalisé grâce au package MULCOM de Hansen et Lunde (2007) sous Ox. Un intervalle de confiance de 20% est considéré pour le test MCS et 10 000 rééchantillons sont utilisés pour le bootstrap (avec une longueur de blocs de 5 observations).

Se basant sur des données d'actions, Laurent et alii (2012b) trouvent que la performance relative des modèles de volatilité dépend fortement de l'état du marché. C'est la raison pour laquelle nous faisons la distinction entre la période avant crise 2002-2007 et la période totale 2002-2008 qui inclut la période de crise financière 2007-2008.

3.6. Resultats

Les résultats du test MCS sont reportés dans le tableau 2. Plusieurs constats peuvent être portés :

- i)* sur la période avant crise (2002-2007), le seul modèle retenu par le test MCS est le modèle cDCC avec un modèle AR(1)-GJR(1,1) estimé sur les rendements filtrés et ce résultat prévaut à la fois pour les prévisions de la covariance et pour celle des corrélations.
- ii)* Sur la période totale incluant la crise financière de 2008, les résultats obtenus sont conformes à ceux de Laurent et alii (2012b), dans le sens où tous les modèles sont peu performants en termes de prévision de la covariance. Le modèle le plus performant est le modèle CCC estimé sur les rendements filtrés mais la perte n'est pas statistiquement différente de celle des autres modèles concurrents à un seuil de significativité de 10%. On peut constater la forte hausse dans la distance de Frobenius sur la période totale comparée à la période avant crise, suggérant que tous ces modèles de volatilité ne sont pas satisfaisants en période de forte volatilité.
- iii)* Sur la période totale, il apparaît toutefois que le modèle cDCC estimé sur les rendements filtrés des jumps est plus performant en terme de prévision des corrélations que les autres modèles concurrents.

4. Conclusion

Il est largement reconnu dans la littérature financière que les rendements à haute fréquence de la plupart des actifs financiers connaissent des périodes de regroupement de volatilité ainsi que de larges discontinuités ou jumps le plus souvent causés par l'arrivée de nouvelles informations (surprises). Toutefois, ces jumps affectent moins la volatilité future que les modèles standards de volatilité ne le prédisent (voir Andersen et alii, 2007; Harvey et Chakravarty, 2008; Muler et Yohai, 2008 parmi d'autres).

En utilisant le test de jumps additifs récemment proposé par Laurent et alii (2012a), l'analyse réalisée sur 10 actions américaines fait ressortir plusieurs constats :

- i)* Entre 1 et 2% des observations peuvent être qualifiées comme des jumps sur la période 1999-2008 ;
- ii)* L'hypothèse de normalité conditionnelle sur les rendements filtrés n'est rejetée dans aucun des cas, tandis qu'elle l'est sur les rendements bruts ;
- iii)* L'estimation de plusieurs modèles GARCH multivariés sur les rendements bruts et filtrés des jumps et la comparaison de ces modèles en terme de performance prédictive des covariances et corrélations conditionnelles ont permis de montrer que le modèle cDCC de Aielli (2013) estimé sur les rendements filtrés est plus performant que tous les autres modèles de volatilité inclus dans l'étude empirique réalisée.

Références

- G.P. Aielli. Dynamic conditional correlations : on properties and estimation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 31 :282–299, 2013.
- T.G. Andersen, T. Bollerslev, F.X. Diebold, et P. Labys. Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71 :579–625, 2003.
- Torben Gustav Andersen, T. Bollerslev, et F.X. Diebold. Roughing it up : Including jump components in the measurement, modelling and forecasting of return volatility. *Review of Economics and Statistics*, 89 :701–720, 2007.
- Torben Gustav Andersen, T. Bollerslev, et Dobrislav Dobrev. No-arbitrage semi-martingale restrictions for continuous-time volatility models subject to leverage effects, jumps and i.i.d. noise : Theory and testable distributional implications. *Journal of Econometrics*, 138 :125–180, 2007b.
- L. Bauwens, S. Laurent, et J.V.K. Rombouts. Multivariate GARCH models : A survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21 :79–109, 2006.
- T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 :307–327, 1986.
- Kris Boudt et Christophe Croux. Robust M-estimation of multivariate GARCH models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54 :2459–2469, 2010.
- Kris Boudt, Jón Daniélsson, et Sebastien Laurent. Appendix to robust forecasting of dynamic conditional correlation garch models. *Available at www.econ.kuleuven.be/kris.boudt/public*, 2010.
- Kris Boudt, Jón Daniélsson, et Sebastien Laurent. Robust forecasting of dynamic conditional correlation GARCH models. *International Journal of Forecasting*, 29 :244–257, 2013.

- MA Carnero, D Pena, et Esther Ruiz. Effects of outliers on the identification and estimation of garch models. *Journal of Time Series Analysis*, 28 :471–497, 2007.
- MA Carnero, D Pena, et Esther Ruiz. Estimating and forecasting GARCH volatility in the presence of outliers. IVIE working paper, 2008.
- A. Charles et O. Darné. Outliers and garch models in financial data. *Economics Letters*, 86 :347–352, 2005.
- D. Creal, S.J. Koopman, et A. Lucas. Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28 :777–795, 2013.
- J.A. Doornik. *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*. Timberlake Consultants Press, 2014.
- R. Engle et F.K. Kroner. Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11 :122–150, 1995.
- R.F. Engle. Dynamic conditional correlation - a simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20 :339–350, 2002.
- P.H. Franses et H. Ghijssels. Additive outliers, GARCH and forecasting volatility. *International Journal of Forecasting*, 15 :1–9, 1999.
- P. Giot et S. Laurent. Value-at-Risk for long and short positions. *Journal of Applied Econometrics*, 18 :641–664, 2003.
- L.R. Glosten, R. Jagannathan, et D.E. Runkle. On the relation between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48 :1779–1801, 1993.
- P.R. Hansen et A. Lunde. Mulcom 2.00, econometric toolkit for multiple comparisons. http://mit.econ.au.dk/vip_hm/alunde/mulcom/mulcom.htm, 2007.

- P.R. Hansen, A. Lunde, et J.M. Nason. Model confidence sets. *Econometrica*, 79 :453–497, 2011.
- Andrew Harvey et T. Chakravarty. Beta-t-(e)garch. Working Paper series, University of Cambridge, 2008.
- Andrew Harvey et G. Sucarrat. Egarch models with fat tails, skewness and leverage. Forthcoming in *Computational Statistics & Data Analysis*, 2012.
- S. Laurent. *G@RCH 7. Estimating and Forecasting GARCH Models*. Timberlake Consultants Ltd., 2014.
- S. Laurent, C. Lecourt, et F.C. Palm. Testing for jumps in conditionally gaussian ARMA-GARCH models, a robust approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, In Press, 2012a.
- S. Laurent, J.V.K. Rombouts, et F. Violante. On the forecasting accuracy of multivariate GARCH models. *Journal of Applied Econometrics*, 12 :934–955, 2012b.
- S. Laurent, J.V.K. Rombouts, et F. Violante. On loss functions and ranking forecasting performances of multivariate volatility models. *Journal of Econometrics*, 173 :1–10, 2013.
- Suzanne S Lee et Per A Mykland. Jumps in financial markets : a new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial studies*, 21 :2535–2563, 2008.
- N. Muler, D. Pena, et V.J. Yohai. Robust estimation for ARMA models. *The Annals of Statistics*, 37 :816–840, 2009.
- N. Muler et V.J. Yohai. Robust estimates for GARCH models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138 :2918–2940, 2008.
- S. Sakata et H. White. High breakdown point conditional dispersion estimation with application to s&p 500 daily returns volatility. *Econometrica*, 66 :529–567, 1998.

Tableau 2: Résultats du test MCS

Modèles	Distance de Frobenius	p-valeur	MCS à 10%
Période 2002-2007, Prévion de la covariance, proxy = RCOV			
cDCC sur rendements bruts	71.32397	0.0236	
cDCC sur rendements filtrés	68.62336	1.0000	*
Scalar BEKK sur rendements bruts	73.17807	0.0099	
Scalar BEKK sur rendements filtrés	71.19012	0.0236	
RiskMetrics sur rendements bruts	73.88192	0.0236	
RiskMetrics sur rendements filtrés	73.55446	0.0050	
CCC sur rendements bruts	71.32643	0.0236	
CCC sur rendements filtrés	70.18752	0.0236	
Période 2002-2008, Prévion de la covariance, proxy = RCOV			
cDCC sur rendements bruts	1949.00880	0.4040	*
cDCC sur rendements filtrés	1572.74630	0.4621	*
Scalar BEKK sur rendements bruts	1637.04605	0.4621	*
Scalar BEKK sur rendements filtrés	1657.98640	0.4621	*
RiskMetrics sur rendements bruts	1909.06953	0.3026	*
RiskMetrics sur rendements filtrés	1705.74939	0.4040	*
CCC sur rendements bruts	1775.43811	0.4621	*
CCC sur rendements filtrés	1535.03361	1.0000	*
Période 2002-2007, Prévion de la corrélation, proxy = RCORR			
cDCC sur rendements bruts	23.63668	0.0000	
cDCC sur rendements filtrés	22.85936	1.0000	*
Scalar BEKK sur rendements bruts	23.27173	0.0000	
Scalar BEKK sur rendements filtrés	23.18406	0.0000	
RiskMetrics sur rendements bruts	24.79055	0.0000	
RiskMetrics sur rendements filtrés	24.55897	0.0000	
CCC sur rendements bruts	23.65286	0.0000	
CCC sur rendements filtrés	23.73091	0.0000	
Période 2002-2008, Prévion de la corrélation, proxy = RCORR			
cDCC sur rendements bruts	21.06935	0.0000	
cDCC sur rendements filtrés	20.34882	1.0000	*
Scalar BEKK sur rendements bruts	21.36975	0.0000	
Scalar BEKK sur rendements filtrés	21.03603	0.0000	
RiskMetrics sur rendements bruts	23.01261	0.0000	
RiskMetrics sur rendements filtrés	22.57040	0.0000	
CCC sur rendements bruts	20.91138	0.0000	
CCC sur rendements filtrés	20.94069	0.0000	

Note : MCS avec un seuil de significativité de 10% et 10000 rééchantillonnages de bootstraps avec une longueur dec'est-à-dire 5 observations par bloc.